Analytische Geometrie des Kreises

Nicht vektoriell

§ 3: Mehrere Kreise

Klasse 10 / 11

Datei Nr. 22 113 C

Stand: 3. Juni 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt:

§ 3 Mehrere Kreise

3.1 Schnitt zweier Kreise

Beispiel 1

Gegeben sind: k_1: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$

und k_2: $(x-6)^2 + (y+1)^2 = 50$

Berechne die Schnittpunkte von k_1 und k_2.

Lösung / Methode

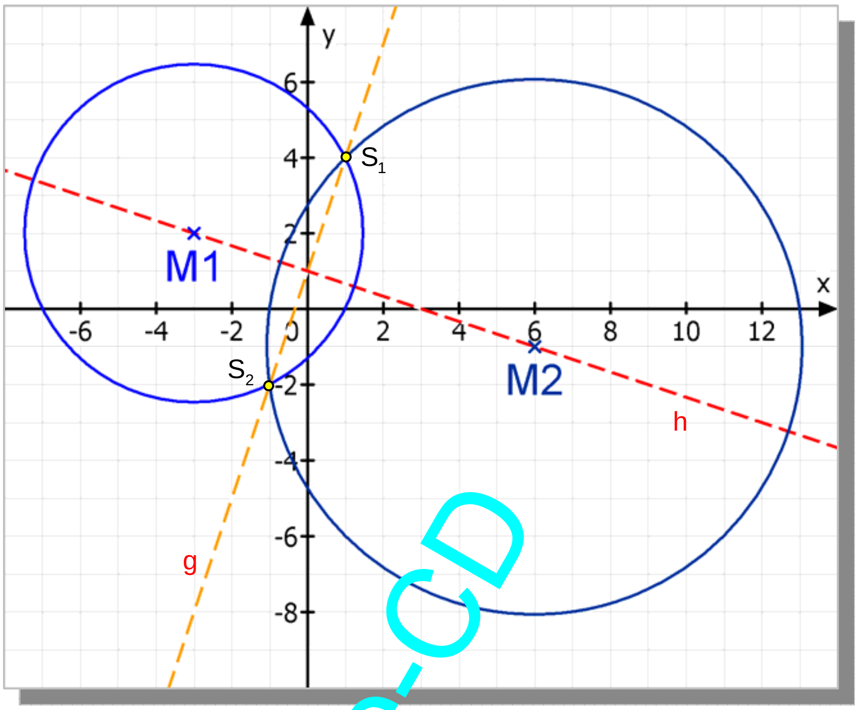
CD!

Ergebnis: Die Schnittpunkte der Kreise sind $S_1(1|4)$ und $S_2(-1|-2)$

(Siehe Abbildung auf der nächsten Seite)

Die Abbildung zeigt die „Chordale“ g, die bei der Berechnung der Schnittpunkte zweier Kreise entsteht.

Erst nach dem Schnitt dieser Geraden mit einem der beiden Kreise erhält man die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2.



Zusatzaufgaben zu Beispiel 1:

a) Wie lang ist die gemeinsame Sehne ?

$$\overline{S_1S_2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

b) **Welchen Inhalt das Viereck $M_1S_1M_2S_2$?**

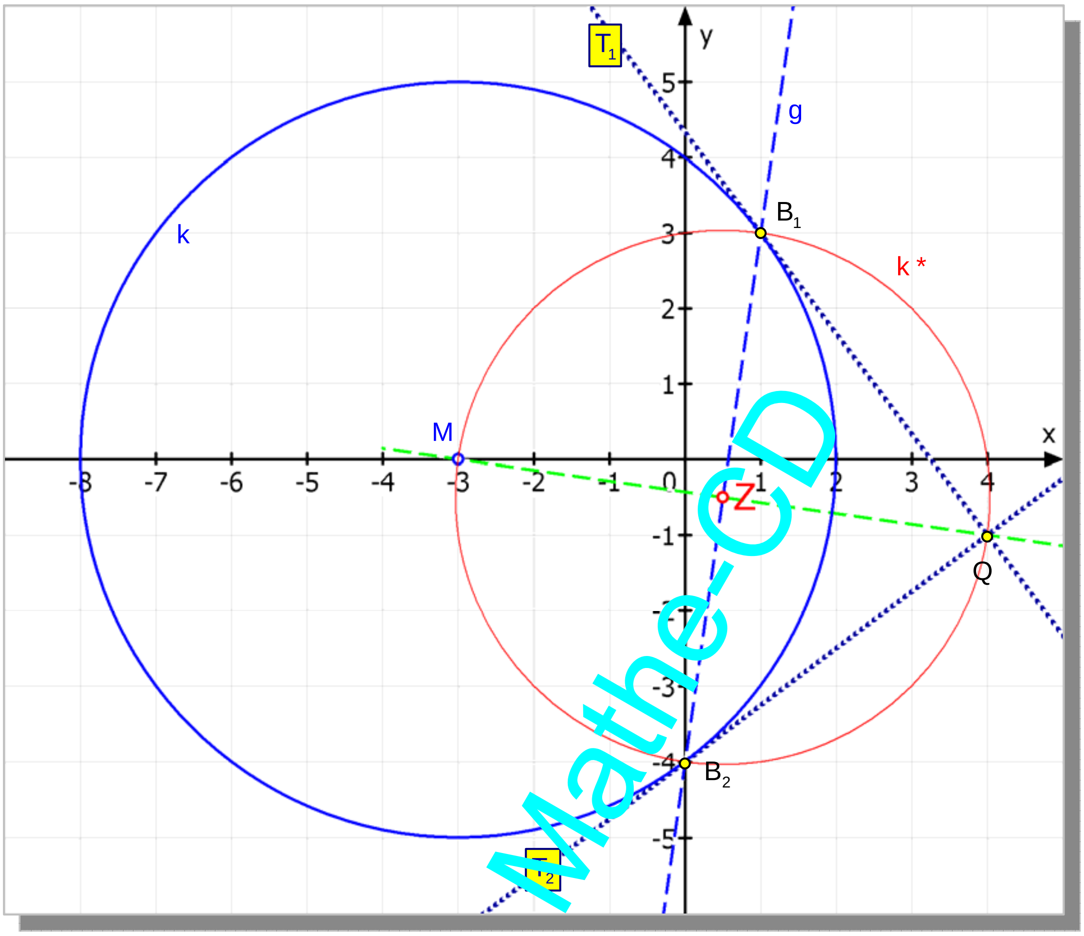
Dieses Viereck ist ein symmetrischer Drachen, weil die Strecke M_1M_2 die Sehne S_1S_2 halbiert und beide zueinander orthogonal sind.

Der Inhalt eines Drachens wird durch $A = \frac{1}{2}ef$ berechnet, wobei e und f die beiden Diagonalen sind.

Mit $e = S_1S_2$ und $f = \overline{M_1M_2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ folgt für den Dracheninhalt:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 30$$

3.2 4. Tangenten - Grundaufgabe: Lege eine Tangente von Q an k



Gegeben ist der Kreis k: $\boxed{(x+3)^2 + y^2 = 25}$ und der Punkt $\boxed{Q(4|-1)}$.

Gesucht sind die Tangenten an k, welche durch Q gehen.

Zunächst die Konstruktion:

Die Konstruktion einer Tangente von einem Punkt Q an einen Kreis K geschieht mittels zweier Kreise. Die zunächst gesuchten Tangenten $T_1 = (QB_1)$ und $T_2 = (QB_2)$ stehen auf den Strecken (Radien) MB_1 bzw. MB_2 senkrecht. (Diese Radien sind nicht eingezeichnet.) Um diese rechten Winkel zu erhalten, zeichnet man den sogenannten Thaileskreis über der Strecke MQ.

Dazu sind folgende **Konstruktionsschritte** auszuführen:

1. Schritt: Konstruiere den Mittelpunkt Z der Strecke MQ.

2. Schritt: Zeichne den Kreis k* um Z durch Q und M.
Dieser schneidet den gegebenen Kreis k in den gesuchten Berührpunkten B_1 und B_2.

3. Schritt: Die Geraden QB_1 und QB_2 sind die gesuchten Tangenten.

Die zugehörige Rechnung folgt genau diesen Konstruktionsschritten!

Beispiel 2

Gegeben sind k: $(x+3)^2 + y^2 = 25$ und $Q(4\,|\,-1)$.

1. Schritt: Aufstellung der Gleichung des Thaleskreises k* über QM

Mittelpunkt Z von QM: $Z\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\right)$.

Radius $r = \overline{MZ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Gleichung von k*: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$

2. Schritt: Schnitt von k und k* (nach Beispiel 1):

CD!

Die Punkt-Steigungsform liefert dann die Tangentengleichungen zu

$T_1: \quad y = \frac{3}{4}x - 4$ und $T_2: \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$

Aufgaben:

(14) Schneide folgende Kreise. Berechne die Schnittpunkte. (Zu 3.1)

(a) $k_1: \ (x+4)^2+(y-7)^2=50$ $\quad k_2: \ (x-7)^2+(y+2)^2=80$

(b) $k_1: \ (x+2)^2+(y-1)^2=25$ $\quad k_2: \ (x-2)^2+(y+1)^2=65$

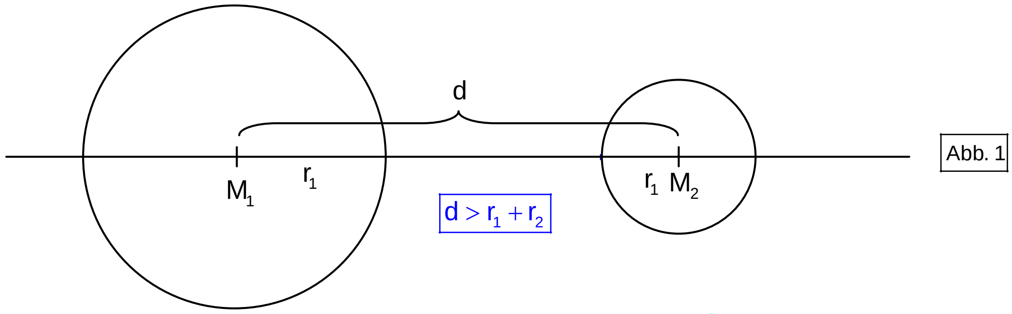
(15) Lege von Q die Tangenten an K. Berechne ihre Gleichungen sowie die Koordinaten der Berührpunkte. (Zu 3.2)

(a) k: $(x+6)^2+(y-2)^2=85$ und Q (14 I – 3)

(b) k: $(x+2)^2+(y+3)^2=34$ und Q (6 I – 1)

3.3 Schnittbedingung für 2 Kreise

Man sieht den Gleichungen zweier Kreise nicht an, welche Lage die Kreise zueinander haben. Dazu vergleicht man den Abstand der Mittelpunkte $d = \overline{M_1M_2}$ mit den Radien der Kreise.

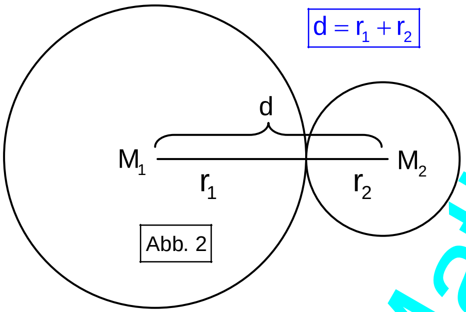


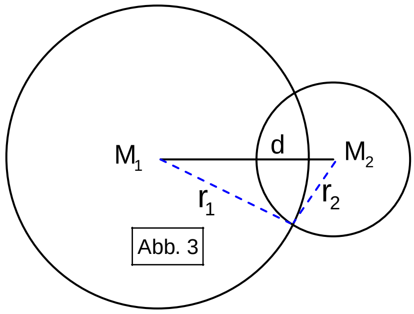
$\boxed{d > r_1 + r_2}$

In Abb. 1 ist der Abstand d der Mittelpunkte größer als die Summe der Radien.

In Abb. 2 berühren sie sich außen.

$\boxed{d = r_1 + r_2}$

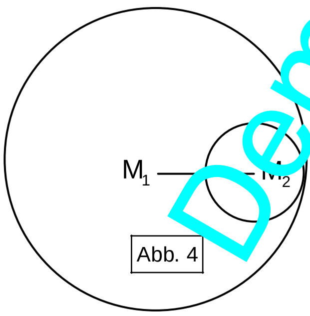




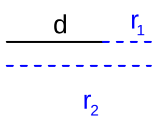
Rücken die Kreise weiter zusammen, schneiden sie sich.

$\boxed{d < r_1 + r_2}$

In Abb. 4 berührt der kleine Kreis den großen von innen.

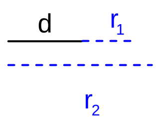


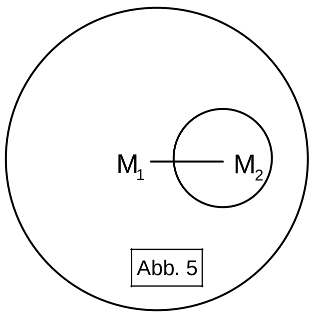
$\boxed{d = r_1 - r_2}$



In Abb. 5 liegt der kleine Kreis ganz im Innern des großen:

$d + r_1 < r_2 \;\Rightarrow\; \boxed{d < r_1 - r_2}$





Ergebnis:

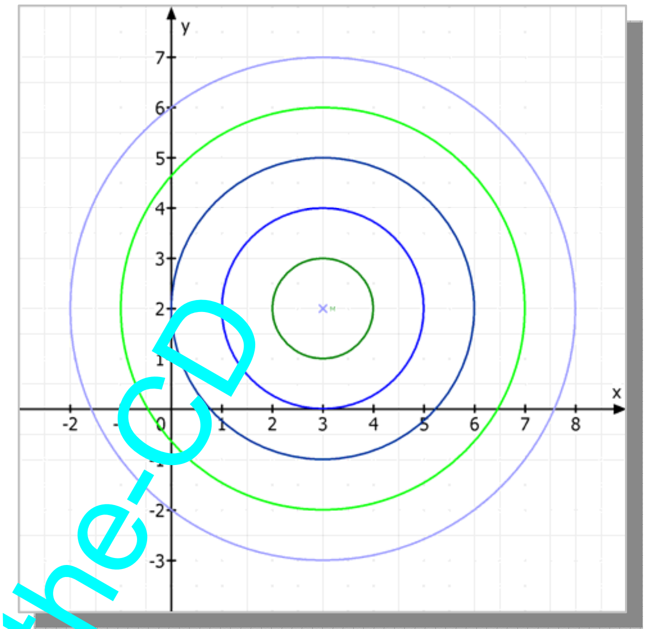
> Zwei Kreise haben nur dann gemeinsame Punkte, wenn gilt: $|r_1 - r_2| \le \overline{M_1M_2} \le r_1 + r_2$
> Die Betragsstriche braucht man, falls $r_2 > r_1$ ist.

Dies wird in 65014 nochmals sehr ausführlich dargestellt!

3.4 Kreisscharen

Man spricht von einer Kreisschar, wenn die Gleichung des Kreises außer den üblichen Variablen x und y noch eine dritte Variable z.B. k enthält. Im Gegensatz zu x und y bleibt diese aber für einen bestimmten Kreis fest und charakterisiert sozusagen seine Lage oder Größe.

Beispiel 1: $(x-3)^2+(y-2)^2=k$ mit $k>0$



Diese Schar enthält unendliche viele Kreise, die alle den Mittelpunkt M (3I2) haben, aber den Radius $r=\sqrt{k}$.

Die Abbildung zeigt die Kreise:

$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ (r=1)

$(x-3)^2+(y-2)^2=4$ (r=2)

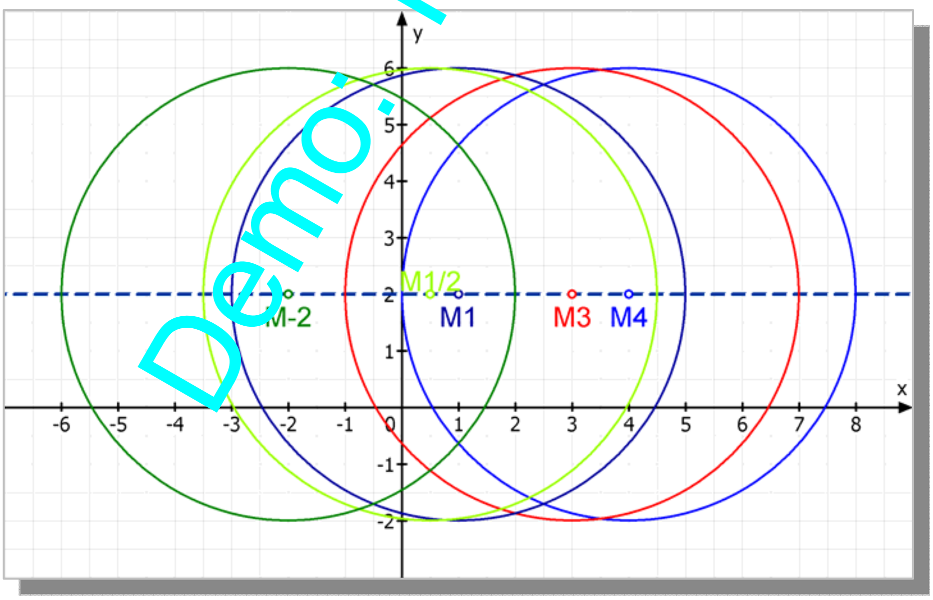
$(x-3)^2+(y-2)^2=9$ (r=3)

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$ (r=4)

$(x-3)^2+(y-2)^2=25$ (r=5)

Beispiel 2: $(x-k)^2+(y-2)^2=16$

Diese Schar enthält lauter Kreise mit dem Radius 4. Die Mittelpunkte haben die Koordinaten $M(k\,|\,2)$. Sie liegen also alle auf der Geraden y = 2.

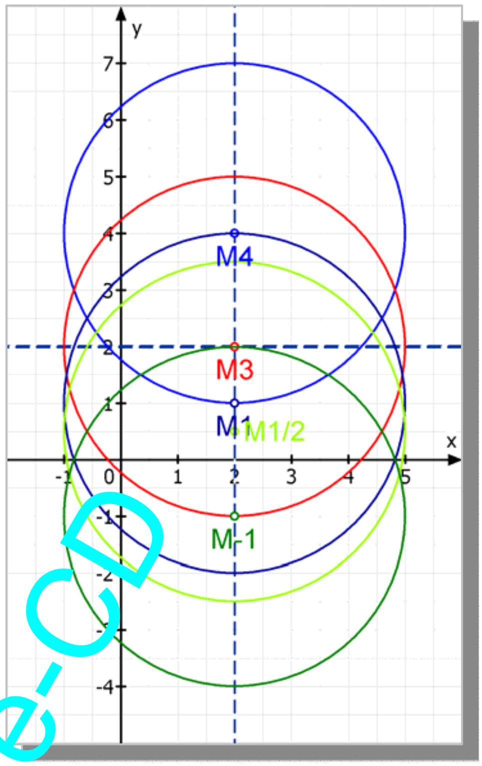


Folgende Kreise sind dargestellt:

k=4:	$\left(x-\boxed{4}\right)^2+(y-2)^2=16$,	$k=\frac{1}{2}$:	$\left(x-\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2+(y-2)^2=16$
k=3:	$\left(x-\boxed{3}\right)^2+(y-2)^2=16$	k=-1:	$\left(x-\boxed{-1}\right)^2+(y-2)^2=16$
k=1	$\left(x-\boxed{1}\right)^2+(y-2)^2=16$	d.h.	$(x+1)^2+(y-2)^2=16$

Beispiel 3: $(x-2)^2+(y-k)^2=9$

Diese Schar enthält lauter Kreise mit dem Radius 3.
Die Mittelpunkte haben die Koordinaten $M(2\,|\,k)$.
Sie liegen also alle auf der Geraden $x = 2$.



Folgende Kreise sind dargestellt:

$k = 4$: $(x-2)^2+(x-\boxed{4})^2=9$

$k = 3$: $(x-2)^2+(x-\boxed{3})^2=9$

$k = 1$: $(x-2)^2+(x-\boxed{1})^2=9$

$k = \frac{1}{2}$: $(x-2)^2+(x-\boxed{\tfrac{1}{2}})^2=9$

$k=-1$: $(x-2)^2+(x-\boxed{-1})^2=9$

$(x-2)^2+(x+1)^2=9$

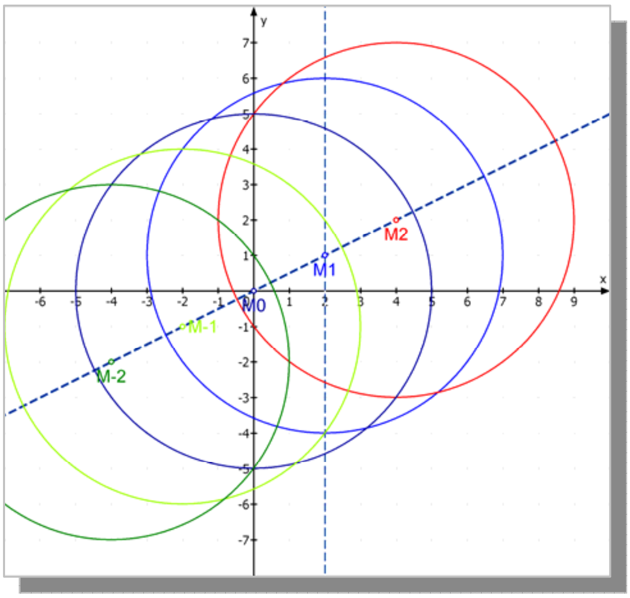
Beispiel 4: $(x-2k)^2+(y-k)^2=25$

Diese Schar enthält Kreise mit dem Radius 5 und den Mittelpunkten $M_K(2k\,|\,k)$.
Um herauszufinden, wo diese Mittelpunkte liegen, schreiben wir ihre Koordinaten auf und suchen nach einem Zusammenhang:

Es gilt $x_M = 2k$ (1)
und $y_M = k$ (2)
Aus (1) folgt $k = \frac{1}{2}x_M$.
Eingesetzt in (2): $y_M = \frac{1}{2}x_M$

Aus diesem Zusammenhang erkennt man, dass die Mittelpunkte unserer Kreisschar auf der Geraden mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$ liegen.

Man nennt sie die
Ortskurve der Kreismittelpunkte.



Dargestellt sind diese Kreise:

$k=1$: $(x-2)^2+(x-1)^2=25$

$k=2$: $(x-4)^2+(x-2)^2=25$

$k=0$: $x^2+y^2=25$

$k=-1$: $(x+2)^2+(y+1)^2=25$

$k=-2$: $(x+4)^2+(y+2)^2=25$

Beispiel 5: $\left(x-2k\right)^2+\left(y-k^2\right)^2=9$

Usw.